مرکز سنجش آموزش مدارس برتر

دوازدهم
ریاضی

پیش‌آزمون شماره ۸
دی‌ماه ۱۴۰۳

پاسخنامه ریاضی ـ فیزیک

ردیف	نام درس	سرگروه	گروه طراحی و بازنگری (به ترتیب حروف الفبا)	ویراستاران
۱	حسابان		حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان	ابوالفضل فروغی ـ محمد منتظران
۲	هندسه	مهریار راشدی	امیرحسین ابومحبوب ـ علیرضا شیرازی احمدرضا فلاح ـ حسن محمدبیگی	داوود روزبهانی ـ مهدیار شریف
۳	گسسته	رضا توکلی	رضا توکلی ـ مصطفی دیداری	محمدحسین جمالی ـ مهدیار شریف
۴	فیزیک	جواد قزوینیان	محمدرضا خادمی ـ محمدمهدی شریفی	محمدرضا خادمی ـ ارسلان کریمی
۵	شیمی	مسعود جعفری	جواد پرتوی ـ محمد عظیمیان زواره	ارسلان کریمی ـ کارو محمدی

واحد فنی (به ترتیب حروف الفبا)
زهرا احدی ـ امیرعلی الماسی ـ مبینا بهرامی ـ معین‌الدین تقی‌زاده ـ پریا رحیمی ـ مهرداد شمسی ـ راضیه صالحی ـ انسیه مرزبان

برای اطلاع از اخبار مرکز سنجش آموزش مدارس برتر، به کانال تلگرام @taraaznet مراجعه نمایید.

حسابان

۱. گزینه ۲ صحیح است.

نمودار f را نسبت به مبدأ قرینه می‌کنیم:

$$y=-1+f(4+\frac{x}{2}) \Rightarrow y=-1+f(4+\frac{x-8}{2}) \Rightarrow y=f(\frac{x}{2})$$

اگر به جای x قرار دهیم ۲x یعنی انقباض افقی دهیم، آنگاه نمودار حاصل بر f منطبق خواهد شد.

۲. گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x)=-(x+2)^3+8 \\ g(x)=-(x+5)^3+8+k \end{cases} \Rightarrow f(-3)=,(-3)$$

$$\begin{cases} f(-3)=9 \\ g(-3)=+k \end{cases} \Rightarrow k=9$$

۳. گزینه ۲ صحیح است.

$$fof(1)=2f(-1)$$
$$f(1)=2-2a-1+a+a=1 \Rightarrow fof(1)=1$$
$$f(-1)=2+2a-1-a+a=2a+1$$

پس:

$$1=2(2a+1) \Rightarrow 4a+2=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

۴. گزینه ۲ صحیح است.

$$f(x)=(x^2-1)g(x)+3x+5 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=8 \\ f(-1)=2 \end{cases}$$

باقیماندهٔ خواسته شده به ازای $x=0$ به دست می‌آید.

$$R=3f(2x-1)+2f(2x+1)=3f(-1)+2f(1)=6+16=22$$

۵. گزینه ۱ صحیح است.

$$\text{صعودی: } 5f \xrightarrow{\text{جمع}} \begin{matrix} \text{صعودی} \\ \text{صعودی} \end{matrix} \begin{cases} f-2g \\ 2(2f+g) \end{cases}$$

پس $f(x)$ صعودی است و چون x^2 و $f(-x)$ هر دو در بازهٔ $(-\infty , 0)$ نزولی است، پس $x^2+f(-x)$ نیز نزولی است.

۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$3x-f(x)=\begin{cases} -x & x\le 0 \\ x & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 3x & x\le 0 \\ x & 0<x<1 \\ 2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$$

$$-x+f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 0 \\ 0 & 0<x<1 \\ x-1 & x\ge 1 \end{cases}$$

۷. گزینه ۴ صحیح است.

$$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}T \Rightarrow T=\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|\frac{1}{a}|}=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow |a|=\frac{5}{12}$$

$$y=\frac{1}{a}\sin ax \Rightarrow T'=\frac{2\pi}{|a|}=\frac{24\pi}{5}$$

۸. گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x)=a-2(1-\cos(2bx-\frac{\pi}{2}))=a-2+2\sin 2bx$$

$$b>0 \Rightarrow T=\frac{2\pi}{2b}=\frac{\pi}{2} \Rightarrow b=2$$

$$\max = a-2+2 \Rightarrow a=3$$

پس $a+b=5$ است.

۹. گزینه ۲ صحیح است.

$$\cos^2 x=\frac{1}{5} \Rightarrow 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \tan x=2 \ , \ \tan\alpha=2$$

$$\sin^2 x=\frac{9}{10} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{10} \Rightarrow \tan\beta=3$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1-6}=-1 \Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=-1$$

۱۰. گزینه ۴ صحیح است.

$$f(0)=1 \Rightarrow a+\sqrt{3}\tan(-\frac{\pi}{6})=1 \Rightarrow a-1=1 \Rightarrow a=2$$

از طرفی $b<0$ پس:

$$b\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$$

$$b\frac{\pi}{8}=-\frac{\pi}{3} \Rightarrow b=-\frac{8}{3} \Rightarrow ab=-\frac{16}{3}$$

۱۱. گزینه ۴ صحیح است.

$$\cos(\underbrace{x+\frac{\pi}{6}}_{\alpha})\cos(\underbrace{\frac{\pi}{3}-x}_{\beta})=\frac{1}{4}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{6})\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+\frac{\pi}{6})\cos(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$2x+\frac{\pi}{3}=\underset{\text{غ ق ق}}{\frac{\pi}{6}} \ , \ \frac{5\pi}{6} \ , \ \frac{13\pi}{6} \ , \ \frac{17\pi}{6} \ , \ \frac{25\pi}{6}$$

$$x=\frac{\pi}{4} \ , \ \frac{11\pi}{12} \ , \ \frac{5\pi}{4} \ , \ \frac{23\pi}{12}$$

$$S=\frac{3\pi+11\pi+15\pi+23\pi}{12}=\frac{52\pi}{12}=\frac{13\pi}{3}$$

۱۲. گزینه ۳ صحیح است.

$$\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{\sin 2x} \Rightarrow \sin 2x=-\cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x=-\cos x \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{11\pi}{6} \ , \ \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\frac{\pi}{6})=\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۳. گزینه ۲ صحیح است.

مخرج در $x=b$ ریشهٔ مضاعف دارد:

$$f(x)+g(x)=ax^2-2ax+2$$

ریشهٔ مضاعف $f+g$ همان $x=1$ است، پس:

$$ax^2-2ax+2=2(x-1)^2$$

و در نتیجه $a=2$ و $b=1$ است.

۱۴. گزینه ۲ صحیح است.

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)}{\sin x-۲\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)}{\sin x(\underbrace{۱-۲\cos x}_{۳})}=\frac{f(\pi^+)}{۰^-}$$

پس باید f در سمت راست π، مثبت باشد. پس گزینهٔ ۲ صحیح است.

۱۵. گزینه ۳ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^۲+bx+۲}-۲x=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+bx+۲-۴x^۲}{۴x}=۳\Rightarrow\begin{cases}a-۴=۰\\ \frac{b}{۴}=۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=۴\ ,\ b=۱۲\Rightarrow\frac{b}{a}=۳$$

۱۶. گزینه ۱ صحیح است.

$$\lim_{x\to+\infty}x(\frac{ax^۲+bx+۳}{x^۲-۳x+۴}-c)=۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(a-c)x^۳+(b+۳c)x^۲+(۳-۴c)x}{x^۲-۳x+۴}=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-c=۰\\ b+۳c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=c\\ b=-۳c\end{cases}\Rightarrow\frac{ab}{c^۲}=-۳$$

۱۷. گزینه ۱ صحیح است.

$a=۰\Rightarrow f(x)=\frac{(x-۱)(x-۲)}{۲x-۴}=\frac{x-۱}{۲}$ ✗ مجانب قائم ندارد.

$\Delta=۰\Rightarrow ۱-a(۵a-۴)=۰\Rightarrow ۱-۵a^۲+۴a=۰$ مخرج

$$\Rightarrow ۵a^۲-۴a-۱=۰$$

$$\begin{cases}a=۱\Rightarrow y=\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)^۲}=\frac{x-۲}{x-۱}\ ✓\\ a=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow y=\frac{(x-۱)(x-۲)}{-\frac{۱}{۵}(x-۵)^۲}\end{cases}$$ یک مجانب قائم دارد.

$x=۱\Rightarrow ۶a-۲=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$ ✓ ریشهٔ مخرج

$x=۲\Rightarrow ۴a+۵a=۰\Rightarrow a=۰$ ✗ ریشهٔ مخرج

پس کلاً ۳ مقدار برای a یافت می‌شود.

۱۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$f^{-۱}(x)=\frac{-bx-۱}{۲x-a}\Rightarrow A(\frac{a}{۲}\ ,\ -\frac{b}{۲})$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{f(x)}=\frac{۲x+b}{ax-۱}\Rightarrow B(\frac{۱}{a}\ ,\ \frac{۲}{a})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{a}=\frac{a}{۲}\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}\\ \frac{۲}{a}=-\frac{b}{۲}\Rightarrow b=-\frac{۴}{\pm\sqrt{۲}}=\pm۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

هندسه

۱۹. گزینه ۱ صحیح است.

$$B=\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}_{۳\times۱}\Rightarrow[\cos\theta\ \ \sin\theta\ \ ۱]\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & ۰\\ -\sin\theta & \cos\theta & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}=۱$$

$$\Rightarrow[\cos^۲\theta-\sin^۲\theta\ \ ۲\sin\theta\cos\theta\ \ ۱]\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}=۱$$

طبق اتحادهای مثلثاتی می‌دانیم $\cos۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta$ و $\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta$، پس:

$$[\cos۲\theta\ \ \sin۲\theta\ \ ۱]\begin{bmatrix}۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}=۱\Rightarrow\cos۲\theta+\sin۲\theta+۱=۱$$

$$\Rightarrow\sin۲\theta=-\cos۲\theta\Rightarrow\tan۲\theta=-۱$$

$$C=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow C^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow C^۳=C^۲\times C=IC=C$$

$$C^n=\begin{cases}I & \text{زوج } n\\ C & \text{فرد } n\end{cases}\Rightarrow C^{۱۴۰۳}=C=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$C^{۱۴۰۳}$ = مجموع درایه‌های $=-۱+۱+۱+۰=۱$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۱۸ و ۲۰)

۲۰. گزینه ۴ صحیح است.

ماتریس A اسکالر است، پس درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن برابر یکدیگرند و چون A غیرهمانی است، پس این درایه‌ها مخالف یک هستند.

$$x^۲=۵-۴x\Rightarrow x^۲+۴x-۵=۰\Rightarrow(x+۵)(x-۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-۵ & \text{ق ق}\\ x=۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}۲۵ & ۰\\ ۰ & ۲۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y-۵ & y+۵\\ ۸ & -۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+۲۰ & y+۵\\ ۸ & ۵\end{bmatrix}$$

ماتریس $A+B$ وارون‌پذیر نیست، پس دترمینان آن برابر صفر است و در نتیجه داریم:

$$|A+B|=۰\Rightarrow ۵(y+۲۰)-۸(y+۵)=۰$$

$$\Rightarrow ۵y+۱۰۰-۸y-۴۰=۰\Rightarrow -۳y+۶۰=۰\Rightarrow y=۲۰$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۱۲، ۲۲ و ۲۳)

۲۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$A+۲(A^{-۱})^۲=\overline{۰}\xrightarrow{\times A^۲}A^۳+۲(A^۲)^{-۱}\times A^۲=\overline{۰}$$

$$\Rightarrow A^۳+۲I=\overline{۰}\Rightarrow A^۳=-۲I\xrightarrow{+I}A^۳+I=-I$$

$$\Rightarrow(A+I)(A^۲-A+I)=-I$$

$$\xrightarrow{\times-۱}(-A-I)(A^۲-A+I)=I\Rightarrow(A^۲-A+I)^{-۱}=-A-I$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۲)

۲۲. گزینه ۴ صحیح است.

حاصل دترمینان را برحسب سطر اول به دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & ۶ & x+۸\\ x-۲ & ۴ & -۴\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow ۱(-۱)^۲\begin{vmatrix}۶ & x+۸\\ ۴ & -۴\end{vmatrix}+۲(-۱)^۳\begin{vmatrix}-۱ & x+۸\\ x-۲ & -۴\end{vmatrix}$$

$$+۳(-۱)^۴\begin{vmatrix}-۱ & ۶\\ x-۲ & ۴\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow(-۲۴-۴x-۳۲)+(-۲)(۴-x^۲-۶x+۱۶)$$

$$+۳(-۴-۶x+۱۲)=۰$$

$$\Rightarrow -۵۶-۴x-۴۰+۲x^۲+۱۲x+۲۴-۱۸x=۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۷۲=۰\Rightarrow x^۲-۵x-۳۶=۰$$

$$\Rightarrow(x-۹)(x+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۹\\ x=-۴\end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها برابر با ۵ است.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۸)

۲۳. گزینه ۲ صحیح است.

از طرفین تساوی داده شده وارون می‌گیریم. داریم:

$$AB^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow (AB^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow BA^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$|3BA^{-1}-I|=|3\times\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1\\1&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}|=\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۲۳)

۲۴. گزینه ۱ صحیح است.

از طرفین رابطهٔ ماتریسی دترمینان می‌گیریم. می‌دانیم $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

پس داریم:

$$|3A^{-1}|=\begin{vmatrix}|A|&6\\1&3\end{vmatrix}\Rightarrow 9\times\frac{1}{|A|}=3|A|-6$$

$$\xrightarrow{\times|A|} 9=3|A|^2-6|A|\Rightarrow 3|A|^2-6|A|-9=0$$

$$\xrightarrow{\div 3}|A|^2-2|A|-3=0\Rightarrow(|A|-3)(|A|+1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|A|=3 \text{ ق ق}\\|A|=-1 \text{ غ ق ق}\end{cases}$$

چون $|A|>0$، پس تنها مقدار $|A|=3$ قابل قبول است. با جای‌گذاری این مقدار، ماتریس A و سپس A^2 را پیدا می‌کنیم.

$$3A^{-1}=\begin{bmatrix}3&6\\1&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{وارون}}A=\frac{1}{\frac{1}{3}}\begin{bmatrix}1&-2\\-\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}3&-6\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}3&-6\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-6\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&-36\\-6&15\end{bmatrix}$$

بنابراین:

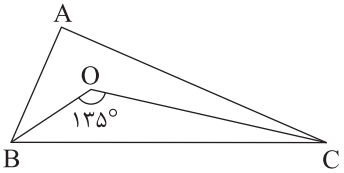
$$\text{مجموع درایه‌های } A^2=15-36-6+15=-12$$

(هندسه دوازدهم، صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱)

۲۵. گزینه ۳ صحیح است.

بنابر فرض سؤال زاویهٔ بین نیمساز زاویه‌های داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر 135° است. از طرف دیگر می‌دانیم این زاویه برابر $90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$ است.

پس:



$$90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=135^\circ\Rightarrow\hat{A}=90^\circ$$

بنابراین مکان هندسی A دایره‌ای به قطر BC به جز نقاط B و C است. زیرا زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر BC قائمه است.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۳۹)

۲۶. گزینه ۱ صحیح است.

فرض کنیم $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، چون $2y=x-1$ در راستای قطر این دایره است، پس $O(\alpha,\frac{\alpha-1}{2})$ داریم.

$$OA=OB\Rightarrow\sqrt{(\alpha+1)^2+(\frac{\alpha-1}{2}-1)^2}=\sqrt{(\alpha-1)^2+(\frac{\alpha-1}{2})^2}$$

$$\Rightarrow\alpha^2+1+2\alpha+\frac{\alpha^2+9-6\alpha}{4}=\alpha^2+1-2\alpha+\frac{\alpha^2+1-2\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow 4\alpha+\frac{\alpha^2+9-6\alpha}{4}=\frac{\alpha^2+1-2\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow 16\alpha+\alpha^2+9-6\alpha=\alpha^2+1-2\alpha$$

$$\Rightarrow 12\alpha=-8\Rightarrow\alpha=-\frac{2}{3}\Rightarrow O(-\frac{2}{3},-\frac{5}{6})$$

بنابراین:

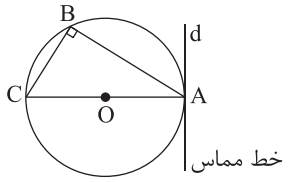
$$x_O+y_O=-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=-\frac{9}{6}=-1/5$$

(هندسه دوازدهم، تمرین ۱ صفحه ۴۶)

۲۷. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned}m_{AB}&=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}\\m_{BC}&=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{4}{2}=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow m_{AB}=-\frac{1}{m_{BC}}\Rightarrow AB\perp BC$$



بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در رأس B قائم‌الزاویه است. پس AC قطر دایره محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ است؛ در نتیجه O (مرکز دایرهٔ محیطی) وسط AC و شعاع این دایره $\frac{AC}{2}$ است.

$$O=\frac{A+C}{2}=(-1,2),R=\frac{AC}{2}=\frac{10}{2}=5$$

می‌دانیم اگر خط d در رأس A بر دایرهٔ محیطی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ مماس باشد آنگاه شیب خط d عکس و قرینهٔ شیب OA است.

بنابراین:

$$m_{OA}=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\frac{0}{5}=0$$

پس شیب خط d تعریف نشده است یعنی خط d موازی با محور yها است پس معادلهٔ آن به صورت $x=4$ می‌باشد.

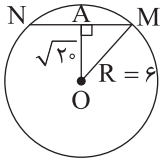
راه‌حل دوم:

فرض کنید معادلهٔ دایره محیطی به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ باشد نقاط A و B و C را در این معادله قرار دهید و با حل دستگاه مقادیر a و b و c را پیدا کنید و بعد معادلهٔ خط مماس را پیدا کنید.

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۴۶)

۲۸. گزینه ۲ صحیح است.

کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A ، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود است. همچنین بزرگ‌ترین وتر، همان قطر گذرنده از A می‌باشد.



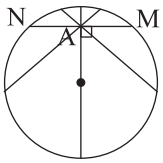
$$O(۲\ ,\ ۳)\ ,\ R=۶\ ,\ |OA|=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

$$\overset{\Delta}{OMA}:\ |AM|^۲=۳۶-۲۰=۱۶\Rightarrow |AM|=۴$$

$$\Rightarrow |MN|=۸$$ (طول کوتاه‌ترین وتر گذرا از A)

$$۲R=۱۲$$ = طول بزرگ‌ترین وتر گذرا از A

بنابراین همهٔ وترهای گذرا از A در بازهٔ (۱۲ , ۸) قرار دارند. دقت کنید! از وترهای به طول ۸ و ۱۲ یکی داریم ولی سایر وترها به علت تقارن موجود، هرکدام ۲ تا می‌باشند.



وترهای به طول صحیح : $\underset{\text{یکی}}{\downarrow ۸}\ ,\ \underbrace{۹\ ,\ ۱۰\ ,\ ۱۱}_{\text{هرکدام ۲ تا}}\ ,\ \underset{\text{یکی}}{\downarrow ۱۲}$

$$\Rightarrow$$ تعداد وترهای به طول صحیح = ۸

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۴۶)

۲۹. گزینه ۴ صحیح است.

در صورتی‌که دو دایره مماس بیرونی باشند، فقط سه مماس مشترک دارند و شرط مماس بیرونی بودن دو دایره آن است که $OO'=R+R'$ باشد. پس لازم است که مرکزهای دو دایره و شعاع‌های آنها را پیدا کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow O(۱\ ,\ ۰)\ ,\ R=\frac{\sqrt{۴+۱۲}}{۲}=۲$$

$$x^۲+y^۲+۴\sqrt{۶}y+b=۰\Rightarrow O'(۰\ ,\ -۲\sqrt{۶})$$

$OO'=\sqrt{۱+۲۴}=۵$ است و داریم:

$$OO'=R+R'\Rightarrow ۵=۲+R'\Rightarrow R'=۳$$: شرط مماس بیرونی

از طرف دیگر طول مماس مشترک خارجی دو دایره از طول مماس مشترک داخلی آنها (در صورت وجود مماس مشترک‌ها) بزرگ‌تر است و طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرونی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$۲\sqrt{RR'}=۲\sqrt{۲\times ۳}=۲\sqrt{۶}$$ = طول مماس مشترک خارجی

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۴۴)

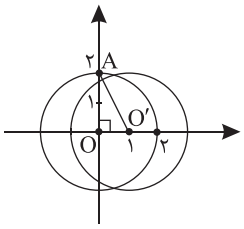
۳۰. گزینه ۲ صحیح است.

$C: x^۲+y^۲-۴=۰$ $\quad O(۰,۰)$ $\quad R=\sqrt{۰+۰+۴}=۲$

$C': x^۲+y^۲-۲x-a=۰$ $\quad O'(۱,۰)$ $\quad R'=\sqrt{۱+۰+a}=\sqrt{۱+a}$

یک شکل تقریبی رسم می‌کنیم تا مقدار a را به دست آوریم. محور yها که عمود بر محور xها می‌باشد، شامل یک قطر دایرهٔ C است.

$\overset{\Delta}{OAO'}$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O'A=R'$ داریم:



$$(\sqrt{۱+a})^۲=۱+۴\Rightarrow ۱+a=۵\Rightarrow a=۴$$

(هندسه دوازدهم، صفحهٔ ۴۶)

ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۳ صحیح است.

۱) $n=۱$ $\quad ۲^n+۱=۳$ $\quad n^۲+۱=۲$ مثال نقض مناسب نیست

۲) $n=۳$ $\quad ۲^n+۱=۹$ $\quad n^۲+۱=۱۰$ مثال نقض مناسب

۳) $n=۵$ $\quad ۲^n+۱=۳۳$ $\quad n^۲+۱=۲۶$ مثال نقض مناسب

۴) $n=۷$ $\quad ۲^n+۱=۱۲۹=۳\times ۴۳$ $\quad n^۲+۱=۵۰$ مثال نقض مناسب

۵) $n=۹$ $\quad ۲^n+۱=۵۱۳$ $\quad n^۲+۱=۸۲$ مثال نقض مناسب

۶) $n=۲$ $\quad ۲^n+۱=۵$ $\quad n^۲+۱=۵$ مناسب نیست

۷) $n=۴$ $\quad ۲^n+۱=۱۷$ $\quad n^۲+۱=۱۷$ مناسب نیست

۸) $n=۶$ $\quad ۲^n+۱=۶۵$ $\quad n^۲+۱=۳۷$ مناسب نیست

۹) $n=۸$ $\quad ۲^n+۱=\underset{\text{عدد اول}}{\downarrow ۲۵۷}$ $\quad n^۲+۱=۶۵$ مناسب نیست

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲ و ۴)

۳۲. گزینه ۳ صحیح است.

کسر وقتی صحیح می‌شود که $x+۲\,|\,۸x-a$ پس داریم:

$$\begin{cases} x+۲\,|\,۸x-a \\ x+۲\,|\,۸(x+۲) \end{cases} \xrightarrow{(-)} x+۲\,|\,۱۶+a$$

اگر $۱۶+a$ اول باشد برای $x+۲$ دقیقاً ۴ عدد به وجود می‌آید:

$$a=۳\Rightarrow x+۲\,|\,۱۹\Rightarrow \begin{cases} x+۲=\pm ۱ \\ x+۲=\pm ۱۹ \end{cases}\Rightarrow$$ چهار نقطه

$$a=۷\Rightarrow x+۲\,|\,۲۳\Rightarrow \begin{cases} x+۲=\pm ۱ \\ x+۲=\pm ۲۳ \end{cases}\Rightarrow$$ چهار نقطه

$$a=۱۱\Rightarrow x+۲\,|\,۲۷\Rightarrow \begin{cases} x+۲=\pm ۱ \\ x+۲=\pm ۳ \\ x+۲=\pm ۹ \\ x+۲=\pm ۲۷ \end{cases}\Rightarrow$$ هشت نقطه

$$a=۱۳\Rightarrow x+۲\,|\,۲۹\Rightarrow \begin{cases} x+۲=\pm ۱ \\ x+۲=\pm ۲۹ \end{cases}\Rightarrow$$ چهار نقطه

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۳۳. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} a=bq+r, ۰\le r<b\Rightarrow r=\frac{b-۱}{۲}\Rightarrow \text{صحیح شود } r \text{ تا } b \text{ باید فرد باشد} \\ a+۱۱=bq' \end{cases}$$

$$bq+\frac{b-1}{2}+11=bq' \xrightarrow{\times 2} 2bq+b-1+22=2bq'$$

$$b(2q-2q'+1)=-21 \Rightarrow b \mid 21 \begin{cases} b=3 \\ b=7 \\ b=21 \end{cases}$$

۳ مقدار طبیعی برای b وجود دارد.

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۱۴)

۳۴. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنیم با جای‌گذاری s و rهای مختلف اعداد c تولید شوند. پس:

$$69r+161s=c \xrightarrow{\text{شرط جواب}} (69\ ,\ 161) \mid c$$

$$\Rightarrow (\underbrace{23\times 3\ ,\ 23\times 7}_{23}) \mid c \Rightarrow 23 \mid c$$

پس c اعداد $23k$ می‌تواند باشد، به ازای $k=5$ کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی بدست می‌آید:

$k=5 \Rightarrow 23\times 5=115 \Rightarrow$ مجموع ارقام $=7$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۶ و ۲۷)

۳۵. گزینه ۱ صحیح است.

چون $77 \overset{19}{\equiv} 1$، پس داریم:

$$7^{28}\times 11^{31}-1=(7\times 11)^{28}\times 11^{3}-1 \overset{19}{\equiv} 1\times 11^{3}-1$$

$$11^{3}-1 \overset{19}{\equiv} 121\times 11-1 \overset{19}{\equiv} 7\times 11-1 \overset{19}{\equiv} 76 \overset{19}{\equiv} 0$$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۲۱)

۳۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$\overline{a\circ ba} \overset{11}{\equiv} \overline{b\circ a} \Rightarrow \cancel{a}-b+\circ-a \overset{11}{\equiv} \cancel{a}-\circ+b \Rightarrow a+2b \overset{11}{\equiv} 0$$

دقت کنید $1 \le a\ ,\ b \le 9$ می‌باشد. پس داریم:

$$a+2b=11 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} a & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline b & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

یا

$$a+2b=22 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} a & 4 & 6 & 8 \\ \hline b & 9 & 8 & 7 \end{array}$$

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۲۲ و ۲۴)

۳۷. گزینه ۳ صحیح است.

$$101 \mid 100!+1 \Rightarrow 100! \overset{101}{\equiv} -1$$

فرض کنید $r \overset{101}{\equiv} 97!$ باشد.

$$\xrightarrow{\times 100\times 99\times 98} \underbrace{100\times 99\times 98\times 97!}_{100!} \overset{101}{\equiv} 100\times 99\times 98r \overset{101}{\equiv} -1$$

می‌دانیم $-1 \overset{101}{\equiv} 100$ و $-2 \overset{101}{\equiv} 99$ و $-3 \overset{101}{\equiv} 98$ پس داریم:

$$17 \overset{101}{\equiv} r \xrightarrow{\div 6} 102 \overset{101}{\equiv} 6r \Rightarrow -1 \overset{101}{\equiv} -6r$$

پس باقیماندهٔ $r=17$ می‌باشد.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۱۸ و ۲۵)

۳۸. گزینه ۴ صحیح است.

$\Delta=7$ و $\delta=4$ است. درجه‌ها را در بیشترین و کمترین حالت می‌نویسیم:

(الف) $10\ ,\ 6\ ,\ \underbrace{7\ ,\ 7\ ,\ \dots\ ,\ 7}_{\text{۱۰ تا}} \xrightarrow{\text{تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد}} 4\ ,\ \underbrace{7\ ,\ 7\ ,\ \dots\ ,\ 7}_{\text{۱۱ تا}}$

$$\Rightarrow \text{مجموع درجات} = 2q \Rightarrow 7\times 10+6+10=2q \Rightarrow q_{max}=43$$

(ب) $7\ ,\ 5\ ,\ \underbrace{4\ ,\ 4\ ,\ \dots\ ,\ 4}_{\text{۱۰ تا}} \xrightarrow{\text{تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد}} 7\ ,\ \underbrace{4\ ,\ 4\ ,\ \dots\ ,\ 4}_{\text{۱۱ تا}}$

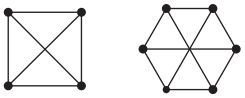
$$\Rightarrow \text{مجموع درجات} = 2q \Rightarrow 4\times 10+5+7=2q \Rightarrow q_{min}=26$$

$$q_{max}-q_{min}=43-26=17$$

(ریاضیات گسسته، صفحهٔ ۳۹)

۳۹. گزینه ۲ صحیح است.

دقت کنید چون $r=3$ عدد فرد است $p=5$ نمی‌تواند باشد و تنها حالتی گراف را می‌توان رسم کرد یک ۳ ـ منتظم مرتبه ۴ همراه یک ۳ منتظم مرتبه ۶ است.



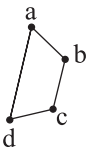
چون ۳ ـ منتظم مرتبه ۶، ۹ یال دارد، می‌توان ۶ یال دیگر به آن اضافه کرد تا گراف همچنان ناهمبند بماند.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۵ و ۴۲)

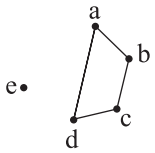
۴۰. گزینه ۲ صحیح است.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

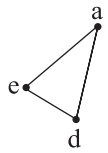
۱ـ زیرگراف دارای دور باشد:



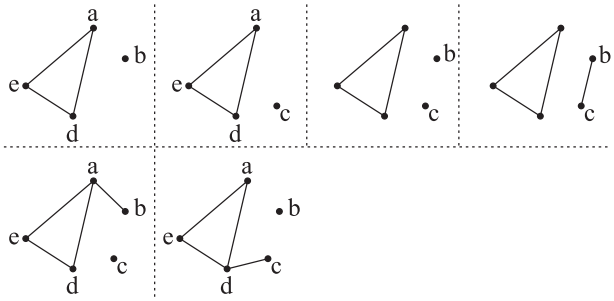
تنها زیر گراف ناهمبند به این صورت به صورت زیر است:



۲ـ زیرگراف دارای دور باشد:



زیرگراف‌های ناهمبند به صورت زیر هستند:



پس ۷ زیرگراف با شرایط داده شده وجود دارد.

(ریاضیات گسسته، صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

فیزیک

۴۱. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه مسیر حرکت تقسیم‌بندی شده است، زمان هر قسمت را برحسب طول مسیر طی شده و تندی آن قسمت محاسبه می‌کنیم و در رابطهٔ $S_{av}=\frac{l_1+l_2+\cdots}{\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots}$ قرار می‌دهیم.

$$S_{av}=\frac{l_1+l_2+l_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}=\frac{l_1+l_2+l_3}{\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_{av_2}}+\frac{l_3}{|v_3|}}$$

اگر مسافت مسیر رفت را d فرض کنیم، داریم:

$$\Rightarrow S_{av}=\frac{\frac{d}{3}+\frac{2d}{3}+\frac{d}{4}}{\frac{d}{30}+\frac{2d}{60}+\frac{d}{22/5}}=\frac{\frac{5}{4}d}{\frac{d}{90}+\frac{d}{90}+\frac{d}{90}}=\frac{\frac{5}{4}d}{\frac{d}{30}}=\frac{150}{4}$$

$$\Rightarrow S_{av}=37/5\frac{m}{s}$$

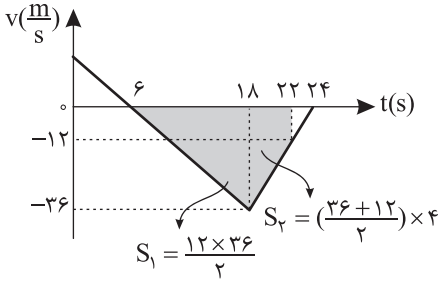
(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳ تا ۶)

۴۲. گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا به کمک ثابت بودن شیب نمودار در هر قسمت، سرعت متحرک را در لحظهٔ $t_2=22s$ پیدا می‌کنیم و سپس مساحت محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان را محاسبه می‌کنیم.

شیب خط دوم : $\frac{36}{6}=6$

$$v_{22}=v_{18}+6\times4\Rightarrow v_{22}=-36+24=-12\frac{m}{s}$$



$$S_1=36\times6=216$$

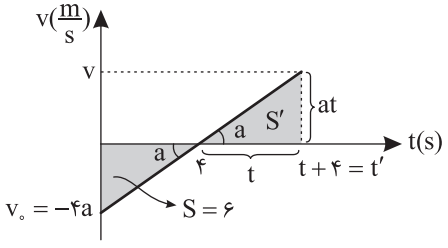
$$S_2=48\times2=96\ ,\ l=S_1+S_2\Rightarrow l=312m$$

$$s_{av}=\frac{1}{\Delta t}\Rightarrow s_{av_{(6s\ ,\ 22s)}}=\frac{216+96}{16}=\frac{312m}{16s}=19/5\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

۴۳. گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرک را از روی نمودار مکان ــ زمان آن رسم می‌کنیم.



هنگامی که مکان متحرک $x=54m$ می‌شود، یعنی پس از لحظهٔ $t=4s$ که در مکان $x=30m$ قرار دارد، باید ۲۴ متر جابه‌جا شده باشد، پس $S'=24$ خواهد بود.

$$\frac{S'}{S}=(\frac{t}{4})^2\Rightarrow\frac{24}{6}=4=(\frac{t}{4})^2\Rightarrow2=\frac{t}{4}\Rightarrow t=8s$$

پس باید در لحظهٔ $t+4$ یعنی $t'=8+4=12s$، تندی متحرک را به دست آوریم.

روش اول:

$$S=6\Rightarrow\frac{4a\times4}{2}=6\Rightarrow a=\frac{3}{4}\frac{m}{s^2}\Rightarrow v_0=-3\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow v=at+v_0\Rightarrow v=\frac{3}{4}\times12-3=6\frac{m}{s}$$

روش دوم:

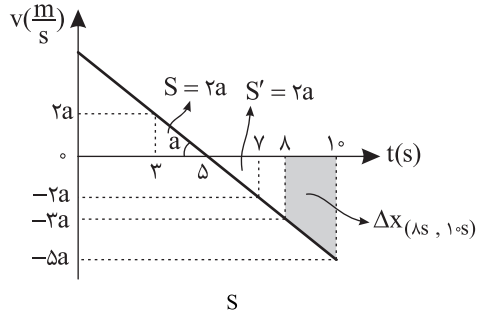
$$S'=24\Rightarrow\frac{v\times8}{2}=24\Rightarrow v=6\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹)

۴۴. گزینه ۴ صحیح است.

هنگامی متحرک دارای کمترین تندی می‌شود که مسافت طی شده در حال کاهش باشد و این اتفاق زمانی می‌افتد که در بازهٔ زمانی مذکور متحرک حتماً دور زده باشد، یعنی سرعت آن صفر شده باشد. پس این بازهٔ زمانی برابر است با $(3s\ ,\ 7s)$، چون متحرک در $t=5s$ جهت حرکتش تغییر کرده و دور زده است.

اکنون نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می کنیم. (a ، اندازه و یا بزرگی شتاب حرکت است.)



$$S_{av_{(3s\ ,\ 7s)}}=\frac{1}{\Delta t}=\frac{S+S'}{4}=1/5$$

$$2S=6\Rightarrow2\times2a=6\Rightarrow a=1/5\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta x_{(8s\ ,\ 10s)}=\frac{-8a}{2}\times2=-8a\xrightarrow{a=1/5}\Delta x_{(8s\ ,\ 10s)}=-12m$$

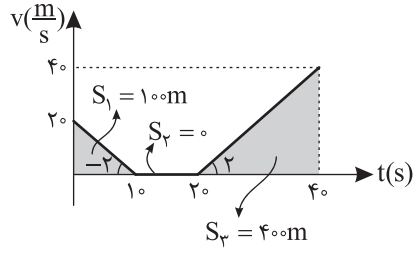
$$\Rightarrow x_{10}-\cancel{x_8}^{0}=-12\Rightarrow\vec{x}_{10}=(-12m)\vec{i}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۵. گزینه ۱ صحیح است.

در تست‌های مبحث حرکت‌شناسی معمولاً هرگاه نمودار شتاب ـ زمان مطرح شود، بهتر است نمودار سرعت ـ زمان آن را ترسیم کنیم.

بنابراین داریم:



$$L=S_1+S_2+S_3=100+400=500$$

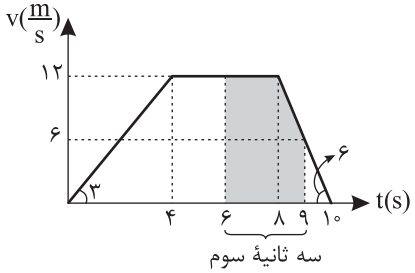
$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{500}{40}=12/5\frac{m}{s}$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{40-20}{40}=0/5\frac{m}{s^2}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۲۱)

۴۶. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به اطلاعات داده شده، نمودار $v-t$ متحرک را از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظهٔ توقف آن ترسیم می‌کنیم. چون مسیر حرکت چندبخشی است، استفاده از نمودار $v-t$ حل مسئله را آسان‌تر می‌کند.



سطح محصور نمودار $v-t$ با محور زمان برابر است با اندازهٔ جابه‌جایی متحرک.

$$v_۹ = -۶\times۱+۱۲ = ۶\frac{m}{s}$$

$$S_{(۶s\,,\,۹s)} = ۱۲\times۲+(\frac{۱۲+۶}{۲})\times۱ = ۲۴+۹ = ۳۳$$

$$\Rightarrow \Delta x_{(۶s\,,\,۹s)} = ۳۳m$$

$$v_{av_{(۶s\,,\,۹s)}} = \frac{\Delta x_{(۶s\,,\,۹s)}}{\Delta t} = \frac{۳۳m}{۳s} = ۱۱\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۷. گزینه ۳ صحیح است.

سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان معرف Δv است.

$$\underset{v=-۱۰}{\underset{\downarrow}{t=۰}} \xrightarrow{\text{کند}} \underset{v=۰}{} \xrightarrow{\text{تند}} \underset{v=۱۰\frac{m}{s}}{\underset{\downarrow}{t=۱۰s}}$$

$$v_{(t=۱۰)} - v_{(t=۰)} = \Delta v \Rightarrow v_{(t=۱۰)} - (-۱۰) = ۲۰$$

$$\Rightarrow v_{(t=۱۰)} = ۱۰\frac{m}{s}$$

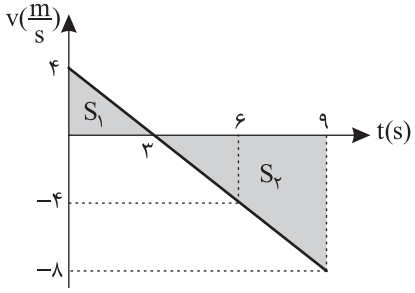
با توجه به تغییر علامت سرعت در ۱۰ ثانیه اول، حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲۰}{۱۰-۰} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳)

۴۸. گزینه ۴ صحیح است.

به علت تقارن در حرکت شتاب ثابت، سرعت در لحظه‌های $t_۱ = ۰$ و $t_۲ = ۶s$ قرینهٔ یکدیگرند. اگر $v_۰ > ۰$ فرض کنیم سرعت در $t_۱ = ۰$ برابر $+۴\frac{m}{s}$ و در $t_۲ = ۶s$ برابر $-۴\frac{m}{s}$ است. برای محاسبهٔ مسافت بهتر از سطح زیر نمودار $(v-t)$ استفاده نماییم.



$$l = S_۱ + S_۲ \Rightarrow l = \frac{۳\times۴}{۲} + \frac{۶\times۸}{۲} = ۶+۲۴ = ۳۰m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۹. گزینه ۲ صحیح است.

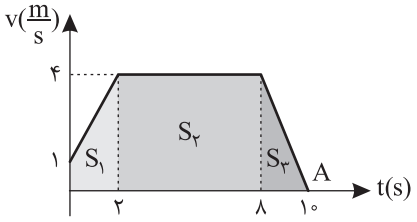
$$|\Delta x_۲ - \Delta x_۱| = |\frac{۱۲+v}{۲}(۱۲) - \frac{v+(-۸)}{۲}(۱۲)|$$

$$= |۷۲+۶v-۶v+۴۸| = ۱۲۰m$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

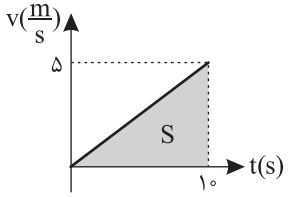
۵۰. گزینه ۲ صحیح است.

از سطح زیر نمودار $(v-t)$، جابه‌جایی دو متحرک را تا $t = ۱۰s$ که متحرک A می‌ایستد به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_A = S_۱ + S_۲ + S_۳ = \frac{(۱+۴)}{۲}\times۲ + (۴\times۶) + \frac{(۴\times۲)}{۲}$$

$$= ۵+۲۴+۴ = ۳۳m$$



$$\Delta x_B = S = \frac{۵\times۱۰}{۲} = ۲۵m$$

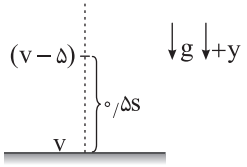
$$\Rightarrow \Delta x_A - \Delta x_B = ۸m$$

بنابراین برای آنکه در لحظهٔ $t = ۱۰s$، این دو متحرک دقیقاً به هم برسند، باید متحرک A، در $(t = ۰)$ ۸ متر از متحرک B عقب‌تر باشد.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۵۱. گزینه ۱ صحیح است.

اگر سرعت در لحظهٔ پایانی v باشد، در ۰/۵ ثانیه قبل آن سرعت $(v-۵)$ است. می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی میانگین سرعت اولیه و نهایی در آن بازهٔ زمانی است.



$$v_{av} = \frac{v+(v-۵)}{۲} \Rightarrow +۴۰ = \frac{۲v-۵}{۲} \Rightarrow v = ۴۲/۵\frac{m}{s}$$

در کل زمان حرکت سرعت اولیه صفر و سرعت نهایی $۴۲/۵\frac{m}{s}$ است. بنابراین داریم:

$$v_{av} = \frac{v_۱+v_۲}{۲} = \frac{۴۲/۵}{۲} = ۲۱/۲۵\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴)

۵۲. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم تندی متحرک در سقوط آزاد از رابطهٔ $|v| = gt$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$g = \frac{|v|}{t} = \frac{۳۳/۶\frac{m}{s}}{۳/۵s} = ۹/۶\frac{m}{s^۲}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۳. گزینه ۳ صحیح است.

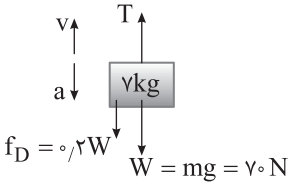
مطابق قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net} = m.\vec{a})$ در صورتی‌که نیروی خالص وارد بر یک جسم ثابت باشد، با توجه به عدم تغییر جرم جسم، شتاب آن نیز ثابت خواهد ماند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲)

۵۴. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا نیروهای وارد بر جسم را ترسیم کرده و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم. وقتی که جسم کندشونده در حال حرکت است، یعنی بردار سرعت و بردار شتاب در یک سو و در خلاف جهت یکدیگر می‌باشند.

بنابراین بردار سرعت رو به بالا و بردار شتاب رو به پایین است.



$$F_{net} = m.a \Rightarrow W + f_D - T = ma$$
$$۷۰ + ۰/۲\times۷۰ - T = ۷\times۳ \Rightarrow T = ۸۴ - ۲۱ = ۶۳N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۷)

۵۵. گزینه ۱ صحیح است.

قانون دوم نیوتون را در هر یک از حالات مطرح شده بررسی می‌کنیم:

(۱) حالت : $F - mg = m(\frac{a}{۲}) \Rightarrow F - ۶۰ = ۶(\frac{a}{۲}) \Rightarrow F - ۶۰ = ۳a$

(۲) حالت : $۲F - mg = m(۳a) \Rightarrow ۲F - ۶۰ = ۱۸a \Rightarrow F - ۳۰ = ۹a$

از حل دو معادله دو مجهولی بالا داریم:

$$۳۰ = ۶a \Rightarrow a = ۵\frac{m}{s^۲}$$

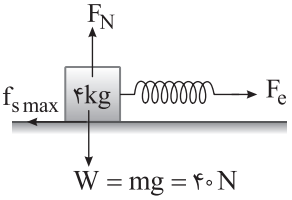
بزرگی نیروی خالص وارد بر جسم در حالت اول برابر است با:

$$|F_{net}| = ma \Rightarrow |F_{net}| = |m(\frac{a}{۲})| = ۶\times\frac{۵}{۲} = ۱۵N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۵)

۵۶. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا نیروهایی که به جسم ۴ کیلوگرمی اثر می‌کنند را ترسیم می‌کنیم و سپس بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی را محاسبه می‌کنیم.



$$f_{s\,max} = \mu_s.F_N = ۰/۱\times۴۰ = ۴N$$

پس نیروی فنر می‌بایست بزرگ‌تر از $۴N$ باشد.

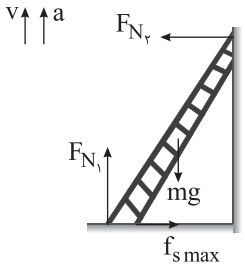
$$F_e > ۴N \Rightarrow kx > ۴N \Rightarrow ۰/۵\frac{N}{cm}\times x > ۴N \Rightarrow x > ۸cm$$

پس حداقل فنر باید ۸ سانتی‌متر کشیده شود تا جسم شروع به حرکت کند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۵)

۵۷. گزینه ۳ صحیح است.

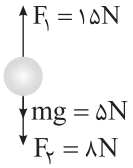
ابتدا می‌بایست نیروهای وارد بر نردبان را رسم کنیم و با توجه به در آستانهٔ لغزش بودن نردبان، قانون دوم نیوتون را یک مرتبه در راستای افقی و بار دیگر در راستای عمودی می‌نویسیم:



$$F_{N_۱} = m(g + a)$$
$$F_{N_۱} = ۱۲\times۱۲ = ۱۴۴N$$
$$F_{N_۲} = f_{s\,max_۱} = \mu_s.F_{N_۱}$$
$$F_{N_۲} = ۰/۴\times۱۴۴ = ۵۷/۶N$$
$$\Rightarrow F_{R_۲} = F_{N_۲} = ۵۷/۶N$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۷ تا ۴۶)

۵۸. گزینه ۴ صحیح است.



۱) $F_{net} = ma \Rightarrow F_۱ - (F_۲ + mg) = ma$

$$\Rightarrow ۱۵ - ۱۳ = ۰/۵a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

اگر رو به بالا حرکت می‌کند، حرکتش تندشونده و شتابش $۴\frac{m}{s^۲}$ است.

۲) $F_{net} = ma \Rightarrow ۸ - ۱۰ = ۰/۵a \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$

اگر رو به پایین حرکت می‌کند، حرکتش کندشونده و بزرگی شتابش $۴\frac{m}{s^۲}$ است.

۳) چون بردار F_{net} رو به بالاست حتماً بردار شتاب نیز رو به بالا خواهد بود.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۵۹. گزینه ۲ صحیح است.

جملات (الف) و (ب) مصداق قانون سوم هستند.

و جملات (ج) و (د) مصداق قانون اول نیوتون هستند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۶۰. گزینه ۱ صحیح است.

چون تغییر تکانه توپ سه برابر تکانهٔ اولیه آن است، باید سرعت بازگشت توپ از دیوار ۲ برابر سرعت برخورد به دیوار باشد.

$$\begin{cases}\vec{P}_۱ = mv\vec{i} \\ \overrightarrow{\Delta P} = -۳mv\vec{i}\end{cases}$$

در واقع: $|\Delta P| = ۳P_۱$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۴۶ و ۴۷)

۶۱. گزینه ۱ صحیح است.

$$\frac{W_h}{W_g} = (\frac{R_e}{R_e + h})^۲$$

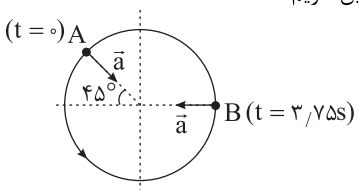
(وزن در h متر بالاتر از سطح زمین) / (وزن در سطح زمین)

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = (\frac{R_e}{R_e + h})^۲ \Rightarrow R_e + h = \sqrt{۲}R_e \Rightarrow h = (\sqrt{۲} - ۱)R_e$$
$$h = (۱/۴ - ۱)R_e = ۰/۴R_e$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۵۳ تا ۵۶)

۶۲. گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به مرکزگرا بودن شتاب متحرک در لحظهٔ $t=0$ در نقطهٔ A قرار دارد و به علت یکنواخت بودن حرکت، مقدار کمان طی شده با زمان متناسب است. بنابراین داریم:



$$\begin{array}{c|c} ۶\,s & ۲\pi\,rad \\ ۳/۷۵\,s & ? \end{array} \Rightarrow ? = \frac{۳/۷۵\times ۲\pi}{۶} = ۱/۲۵\pi = \frac{۵}{۴}\pi$$

پس متحرک در ۳/۷۵ ثانیه، $\frac{۵}{۴}\pi$ می‌چرخد و در نقطهٔ B قرار می‌گیرد.

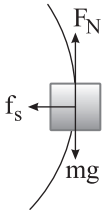
$$a = \sqrt{۳^۲ + ۳^۲} = ۳\sqrt{۲}\,\frac{m}{s^۲} \Rightarrow \vec{a} = -۳\sqrt{۲}\,i$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۵۱)

۶۳. گزینه ۴ صحیح است.

در این حرکت، نیروی اصطکاک، شتاب مرکزگرای لازم را برای دور زدن تأمین می‌کند.

در حداکثر سرعت مجاز نیروی اصطکاک آستانهٔ حرکت $(f_{s\,max})$ نیروی مرکزگرا است.



$$F_N = mg \Rightarrow F_N = ۱۶۰۰۰\,N$$

$$\text{نیروی سطح به خودرو } F_R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲} = \sqrt{f_{s\,max}^۲ + F_N^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰۰۰ = \sqrt{f_{s\,max}^۲ + (۱۶۰۰۰)^۲} \Rightarrow f_{s\,max} = ۱۲۰۰۰\,N$$

$$f_{s\,max} = \mu_s F_N \Rightarrow ۱۲۰۰۰ = \mu_s \times ۱۶۰۰۰ \Rightarrow \mu_s = \frac{۳}{۴}$$

$$\text{از طرفی : } f_{s\,max} = \frac{mv^۲}{r} \Rightarrow \mu_s mg = \frac{mv^۲}{r}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\mu_s rg} = \sqrt{\frac{۳}{۴}\times ۴۰\times ۱۰} = ۱۰\sqrt{۳}\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۵۳)

۶۴. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا به کمک معادلهٔ مکان داده شده، دورهٔ تناوب نوسانگر را پیدا می‌کنیم:

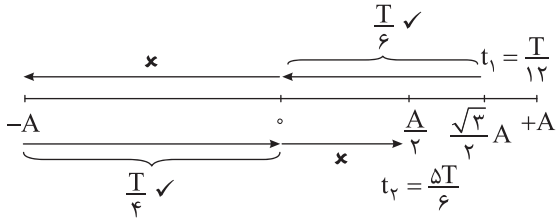
$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{۲۰\pi} = ۰/۱\,s$$

اکنون مکان جسم را در دو لحظهٔ t_1 و t_2 بر روی پاره‌خط نوسان مشخص می‌کنیم:

$$x_1 = A\cos(۲۰\pi\times\frac{۱}{۱۲۰}) = A\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}A\ ,\ t_1 = \frac{T}{۱۲}$$

$$x_۲ = A\cos(۲۰\pi\times\frac{۱}{۱۲}) = A\cos\frac{۵\pi}{۳} = \frac{A}{۲}\ ,\ t_۲ = \frac{۵T}{۶}$$

هرگاه نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک شود، یعنی دارای حرکت تندشونده باشد، فاصلهٔ آن از مبدأ نوسان (مرکز نوسان) کاهش می‌یابد که می‌توان گفت طول بردار مکان در حال کاهش است.



پس مدت زمان موردنظر برابر است با:

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۶} + \frac{T}{۴} = \frac{۵T}{۱۲} = \frac{۱}{۲۴}\,s$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۵. گزینه ۱ صحیح است.

همانطور که می‌دانید در حرکت هماهنگ ساده هنگامی که نوسانگر تغییر جهت می‌دهد، تندی آن صفر می‌شود و دارای بیشترین مقدار شتاب خواهد شد. لازم به ذکر است که یادآوری شود، دامنهٔ نوسان برابر با نصف طول پاره‌خط نوسان است. پس:

$$x = \pm A \Rightarrow v = ۰ \Rightarrow a = \mp a_{max}\ ,\ |a_{max}| = A\omega^۲$$

بنابراین داریم:

$$A\omega^۲ = ۱۶\pi^۲ \xrightarrow{A=۴cm} ۴\times ۱۰^{-۲}\times\omega^۲ = ۱۶\pi^۲$$

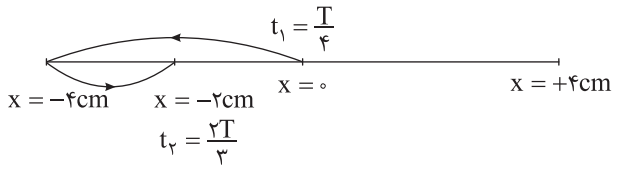
$$\Rightarrow \omega = ۲۰\pi\,\frac{rad}{s}\ ,\ T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{۲۰\pi}$$

$$T = ۰/۱\,s$$

اکنون با توجه به بازهٔ زمانی داده شده، مکان نوسانگر را پیدا می‌کنیم:

$$n_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{\frac{۱}{۴۰}}{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۱}{۴}\ ,\ n_۲ = \frac{t_۲}{T} = \frac{\frac{۱}{۱۵}}{\frac{۱}{۱۰}} = \frac{۲}{۳}$$

یعنی: $t_1 = \frac{T}{۴}$ و $t_۲ = \frac{۲T}{۳}$ است. پس با توجه به پاره‌خط نوسان مقدار مسافت طی شده و تندی متوسط آن را محاسبه می‌کنیم.



$$l = ۴cm + ۲cm = ۶cm \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۶\times ۱۰^{-۲}\,m}{\frac{۵}{۱۲۰}\,s}$$

$$\Rightarrow s_{av} = ۱/۴۴\,\frac{m}{s}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۶. گزینه ۱ صحیح است.

ابتدا به کمک معادلهٔ مکان ــ زمان، مقادیر t_1 و $t_۲$ را برحسب دورهٔ تناوب نوسانگر به دست می‌آوریم:

$$x_1 = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t_1) \Rightarrow \frac{A}{۲} = A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times t_1)$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{۲\pi}{T}t_1) = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{۶} = \frac{۲T}{۱۲}$$

$$x_۲ = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t_۲) \Rightarrow -A\frac{\sqrt{۳}}{۲} = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t_۲)$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{۲\pi}{T}t_۲) = \cos(۲\pi + \frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow \frac{۲\pi}{T}\times t_۲ = \frac{۱۷\pi}{۶} \Rightarrow t_۲ = \frac{۱۷T}{۱۲}$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\Delta t = \frac{۵}{۱۲}s \Rightarrow \frac{۱۷T}{۱۲} - \frac{۲T}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$$

$$\Rightarrow T = \frac{۱}{۳}s \Rightarrow f = ۳Hz$$

این نوسانگر در هر ثانیه، ۳ نوسان انجام می‌دهد.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۲ تا ۶۵)

۶۷. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا می‌توانیم بنویسیم: $\frac{l_۱}{l_۲} = \frac{۱۴۴}{۱۰۰}$

در تست وقتی مطرح شده است که وقتی آونگ $l_۱$، ۲۰ مرتبه طول پاره‌خط را می‌پیماید، آونگ $l_۲$ چند مرتبه طول پاره‌خط را طی کرده است، منظورش این است که مدت زمان سپری شده برای دو آونگ یکسان است.

هر دو مرتبه‌ای که طول پاره‌خط نوسان طی می‌شود، نوسانگر یک نوسان کامل انجام می‌دهد:

$$n = \frac{\Delta t}{T}\ ,\ \Delta t_۱ = \Delta t_۲ \Rightarrow n_۱T_۱ = n_۲T_۲$$

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ و در یک محل } : g_۱ = g_۲ \Rightarrow \frac{T_۱}{T_۲} = \sqrt{\frac{l_۱}{l_۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{n_۲}{n_۱} = \sqrt{\frac{l_۱}{l_۲}} \Rightarrow \frac{n_۲}{۱۰} = \sqrt{۱/۴۴} = ۱/۲ \Rightarrow n_۲ = ۱۲$$

در مدت زمان مشابه، آونگ $l_۲$، ۲۴ مرتبه، طول پاره‌خط نوسان را طی می‌کند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

۶۸. گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا به ساکن به کمک رابطهٔ $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$، بسامد زاویه‌ای هر یک از آونگ‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{۱۰}{۰/۴}} = \sqrt{۲۵} = ۵\frac{rad}{s}$$

$$\omega_B = \sqrt{\frac{۱۰}{۰/۸}} = \sqrt{۱۲/۵} \simeq ۳/۵\frac{rad}{s}$$

$$\omega_C = \sqrt{\frac{۱۰}{۱/۲}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۳}} \simeq ۲/۹\frac{rad}{s}$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{۱۰}{۲/۸}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۷}} \simeq ۱/۹\frac{rad}{s}$$

$$\omega_E = \sqrt{\frac{۱۰}{۳/۵}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۷}} \simeq ۱/۷\frac{rad}{s}$$

مشاهده می‌کنیم تنها بسامد زاویه‌ای آونگ‌های B و C در گسترهٔ بسامد زاویه‌ای میله می‌باشند که دچار پدیدهٔ تشدید خواهند شد و با دامنهٔ بزرگ‌تری به نوسان درمی‌آیند.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۸ و ۶۹)

۶۹. گزینه ۱ صحیح است.

از روی نمودار نقش موج داریم:

$$\frac{\lambda}{۴} = ۱cm \Rightarrow \lambda = ۴cm$$

از رابطهٔ $v = \lambda.f$ که به طور عمومی برای همهٔ انواع موج به کار می‌رود، بسامد موج را محاسبه می‌کنیم:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{۲۰\frac{cm}{s}}{۴cm} = ۵Hz$$

اکنون باید بدانیم که در مدت $\frac{۸}{۵}s$، هر ذره از ریسمان چند نوسان کامل انجام می‌دهد.

$$f = \frac{n}{t} \Rightarrow n = \frac{۸}{۵} \times ۵ = ۸$$

پس مسافت طی شده توسط آن برابر است با:

$$\ell = N(۴A) = ۳۲A = ۳۲ \times ۲cm = ۶۴cm$$

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۲ تا ۷۳)

۷۰. گزینه ۱ صحیح است.

الف) درست

ب) نادرست، تغییر میدان الکتریکی باعث تولید میدان مغناطیسی شود.

ج) نادرست، نوسان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی قطعاً هم‌گام و هم‌بسامد هستند.

د) نادرست، فقط در خلأ سرعت امواج الکترومغناطیس از رابطهٔ $c = (\mu_۰\varepsilon_۰)^{-\frac{۱}{۲}}$ به دست می‌آید.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۷۴ و ۷۵)

۷۱. گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا λ و T را محاسبه می‌کنیم:

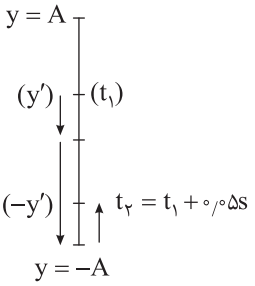
$$\frac{۳\lambda}{۲} = ۳۰cm \Rightarrow \lambda = ۲۰cm$$

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{۰/۲}{۲} = ۰/۱s$$

در نتیجه مدت زمان سپری شده (Δt) برابر است با:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{۰/۰۵}{۰/۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{۲}$$

از آنجایی که در هر $\frac{T}{۲}$، هر ذره به اندازهٔ $۲A$ مسافت طی می‌کند، ذرهٔ M باید طبق مسیر زیر حرکت کند تا از نقطهٔ y' به نقطهٔ $(-y')$ برسد. بنابراین نوع حرکت ذرهٔ M ابتدا تندشونده سپس کندشونده و دوباره تندشونده خواهد بود.



(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۶۹ تا ۷۳)

۷۲. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به تغییر محیط و رابطهٔ تندی انتشار $(v = \frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}})$، تندی انتشار $\frac{۱}{۳}$ برابر شده است:

$$\frac{v'}{v} = \frac{D}{D'} = \frac{۱}{۳}$$

از طرفی به علت آنکه بسامد نیز $\frac{۱}{۳}$ برابر شده است، با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$، طول موج ثابت مانده است.

موج اول فاصلهٔ AD $(\frac{۳}{۲}\lambda)$ را در ۳ ثانیه طی می‌کند بنابراین مسافت O تا A یعنی $\frac{۳}{۴}\lambda$ را در ۱/۵ ثانیه طی می‌کند.

تندی انتشار در موج حاصل $\frac{۱}{۳}$ برابر موج اول است. بنابراین:

یک مسافت یکسان $(\frac{۳}{۴}\lambda)$ را در ۳ برابر مدت زمان موج اول طی می‌کند، یعنی در ۴/۵ ثانیه، بنابراین موج حاصل، مسافت OA را ۳ ثانیه بیشتر از موج اول طی خواهد کرد.

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۷۳)

۷۳. گزینه ۱ صحیح است.

با ثابت ماندن محیط موج، تندی انتشار موج ثابت می‌ماند. در این حالت λ و f با یکدیگر رابطهٔ معکوس دارند (زیرا $\lambda = \frac{v}{f}$)، پس حتماً بسامد کاهش یافته است که طول موج افزایش پیدا کرده است.

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{v_۱=v_۲} \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{f_۱}{f_۲} \xrightarrow{f_۲=۰/۸f_۱} \frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{f_۱}{۰/۸f_۱}$$

$$\Rightarrow \lambda_۲ = \frac{۵}{۴}\lambda_۱$$

$$\begin{cases} \lambda_۲ = \frac{۵}{۴}\lambda_۱ \\ \lambda_۲ - \lambda_۱ = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{۵}{۴}\lambda_۱ - \lambda_۱ = ۲۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\lambda_۱ = ۲۰$$

$$\Rightarrow \lambda_۱ = ۸۰\text{cm} \ , \ \lambda_۲ = ۱۰۰\text{cm} = ۱\text{m}$$

(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۷۱)

۷۴. گزینه ۴ صحیح است.

تمام موارد صحیح است.

(فیزیک دوازدهم، صفحه‌های ۷۲ تا ۷۴)

۷۵. گزینه ۴ صحیح است.

$$\Delta x = \frac{۳}{۴}\lambda \Rightarrow ۶۰ = \frac{۳}{۴}\lambda \Rightarrow \lambda = ۸۰\text{cm}$$

$$\Delta y = ۲A \Rightarrow ۲A = ۲۰ \Rightarrow A = ۱۰\text{cm}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{۸}{۱۰} = \frac{v}{۴} \Rightarrow v = ۳/۲\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

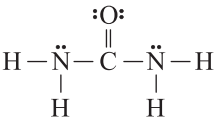
(فیزیک دوازدهم، صفحهٔ ۸۶)

شیمی

۷۶. گزینه ۴ صحیح است.

مورد اول: نادرست، لکهٔ عسل حاوی گروه هیدروکسیل است اما جوهر سرکه استیک اسید می‌باشد.

مورد دوم: درست



اوره $\rightarrow CO(NH_۲)_۲$

$$\frac{\text{جفت الکترون پیوندی}}{\text{جفت الکترون ناپیوندی}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

$$\frac{\text{شمار اتم‌ها}}{\text{شمار عناصر}} = \frac{۸}{۴} = ۲$$

مورد سوم: نادرست، اتیلن گلیکول هیدروکربن نیست.

مورد چهارم: نادرست، سدیم کلرید مولکول نمی‌باشد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴ و ۵)

۷۷. گزینه ۴ صحیح است.

مخلوط A $<$ محلول / کلوئید

مخلوط B $<$ کلوئید / سوسپانسیون

۱) نادرست، محلول نور را پخش نمی‌کند.

۲) نادرست، سوسپانسیون ناپایدار است.

۳) نادرست، اگر هر ۲ مخلوط کلوئید باشند، اندازهٔ ذرات مشابهی دارند.

۴) درست، هم کلوئید و هم سوسپانسیون ناهمگن هستند.

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۷)

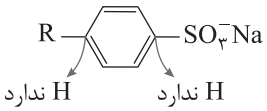
۷۸. گزینه ۱ صحیح است.

۱) نادرست، پاک‌کنندهٔ غیرصابونی رسوب تشکیل نمی‌دهد و نیازی به نمک فسفات ندارد.

۲) نادرست، پاک‌کنندهٔ غیرصابونی توانایی پاک کردن رسوبات دیوارهٔ کتری را ندارد.

۳) نادرست، بخش قطبی پاک‌کنندهٔ غیرصابونی ۹ جفت الکترون ناپیوندی دارد.

۴) درست



(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۷۹. گزینه ۱ صحیح است.

$$۲C_{۱۷}H_{۳۵}COONa + Mg^{۲+} \rightarrow (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Mg + ۲Na^+$$

$$۲C_{۱۷}H_{۳۵}COONa + Ca^{۲+} \rightarrow (C_{۱۷}H_{۳۵}COO)_۲Ca + ۲Na^+$$

مقدار $Mg^{۲+}$ و $Ca^{۲+}$ موجود در آب را به ترتیب برابر $x\ mol$ و $y\ mol$ در نظر می‌گیریم و سپس مقدار صابونی که با هر یک از آنها واکنش می‌دهد را به دست می‌آوریم.

$$x\ mol\ Mg^{۲+} \times \frac{۲mol\ \text{صابون}}{۱mol\ Mg^{۲+}} \times \frac{۳۰۶g\ \text{صابون}}{۱mol\ \text{صابون}} = (۶۱۲x)\ g\ \text{صابون}$$

$$y\ mol\ Ca^{۲+} \times \frac{۲mol\ \text{صابون}}{۱mol\ Ca^{۲+}} \times \frac{۳۰۶g\ \text{صابون}}{۱mol\ \text{صابون}} = (۶۱۲y)\ g\ \text{صابون}$$

$$\Rightarrow ۶۱۲x + ۶۱۲y = ۱۲۲۴g \Rightarrow x + y = ۲mol$$

$$ppm = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ppm\ Mg^{۲+} = \frac{x\ mol \times ۲۴}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = ۹۶ \\ ppm\ Ca^{۲+} = \frac{y mol \times ۴۰}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ = ۱۶۰ \end{cases}$$

$$\frac{ppm\ Mg^{۲+}}{ppm\ Ca^{۲+}} = \frac{۹۶}{۱۶۰} = \frac{x \times ۲۴}{y \times ۴۰} \Rightarrow x = y \Rightarrow x + y = ۲$$

$$\xrightarrow{x=y} x = ۱mol \ , \ y = ۱mol$$

$$ppm\ Ca^{۲+} = ۱۶۰ = \frac{۱mol \times ۴۰}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^۶ \Rightarrow \text{جرم محلول} = ۲۵۰۰۰g$$

$$\xrightarrow{\rho = ۱/۲۵\frac{g}{mL}} \text{حجم محلول} = ۲۰۰۰۰mL = ۰/۲m^۳$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۹)

۸۰. گزینه ۳ صحیح است.

چون یونش HA دوطرفه و یونش HB یک طرفه است، پس HA اسید ضعیف و HB اسید قوی می‌باشد.

۱) نادرست، مقدار H^+ و A^- تولید شده باید به اندازه‌ای باشد که مقدار HA کم می‌شود. در حالی‌که در این شکل مقدار H^+ و A^- تولیدی بیشتر از مقدار HA که کم شده است، می‌باشد.

۲) نادرست، سرعت واکنش فلز Mg با اسید به مقدار $[H^+]$ بستگی دارد. لزوماً اسیدی که قوی‌تر است $[H^+]$ بیشتری ندارد.

۳) درست، چون pH ۲ محلول برابر است پس غلظت اولیهٔ HA بیشتر از HB می‌باشد. حجم گاز H_2 تولیدی به غلظت اولیه اسید بستگی دارد. پس حجم گاز H_2 تولیدی در ۲ واکنش برابر نمی‌باشد و در اسید HA بیشتر است.

۴) نادرست، عنصرهای دورهٔ سوم و چهارم گروه ۱۷، Cl و Br است که هر ۲ اسید قوی تولید می‌کنند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۴، ۱۷ و ۱۸)

۸۱. گزینه ۲ صحیح است.

اسید HB از HA قوی‌تر است. چون رسانایی اسید HA بیشتر از HB است، پس $[H^+]_{HA}$ از $[H^+]_{HB}$ بیشتر است. بنابراین غلظت اولیهٔ HA از HB بیشتر است.

۱) نادرست، سرعت واکنش فلز با اسید به $[H^+]$ بستگی دارد. پس سرعت واکنش اسید HA بیشتر است.

۲) درست، غلظت مولکول‌های یونیده نشده از رابطهٔ $M(1-\alpha)$ به دست می‌آید.

$$\begin{cases}\alpha_B > \alpha_A \\ M_B < M_A\end{cases} \Rightarrow (1-\alpha)_B < (1-\alpha)_A$$
$$\Rightarrow M_B(1-\alpha)_B < M_A(1-\alpha)_A$$

۳) نادرست

$$[H^+]_A > [H^+]_B \Rightarrow [OH^-]_A < [OH^-]_B$$
$$\Rightarrow \frac{[H^+]_B}{[OH^-]_B} < \frac{[H^+]_A}{[OH^-]_A}$$

۴) نادرست، حجم گاز H_2 تولیدی به مقدار M بستگی دارد. پس حجم گاز H_2 تولیدی در اسید HA بیشتر از HB است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۷، ۱۸، ۲۰ و ۲۴)

۸۲. گزینه ۳ صحیح است.

آ) نادرست، تغییرات $[H^+]$و $[OH^-]$به یک نسبت است نه یک اندازه.

ب) نادرست، تغییر دما در اسیدهای قوی هیچ تأثیری بر غلظت یون‌ها ندارد پس pH آن تغییر نمی‌کند.

پ) درست

ت) نادرست، اسید موجود در باران معمولی H_2CO_3 که یک اسید ضعیف می‌باشد و اسید موجود در باران اسیدی HNO_3 و H_2SO_4 است که اسید قوی هستند و ثابت یونش بزرگ‌تری نسبت به H_2CO_3 دارند.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۸ و ۲۲)

۸۳. گزینه ۳ صحیح است.

آ) درست، A و C هر دو، باز هستند و مدل آرنیوس نمی‌تواند رنگ کاغذ pH بین ۲ باز را توجیه کند.

ب) درست

$$\underbrace{N_2O_5}_{0/03mol} + H_2O \rightarrow \underbrace{2H^+}_{0/06mol} + 2NO_3^-$$

پ) نادرست، در شکل C تعداد OH^- و یون مثبت با هم برابر است در حالی‌که در اثر انحلال BaO تولید OH^-، ۲ برابر Ba^{2+} است.

$$BaO + H_2O \rightarrow Ba^{2+} + 2OH^-$$

ت) نادرست، در شکل B تعداد یون H^+ و آنیون‌ها با هم برابر است. در حالی‌که در اثر انحلال H_2SO_4 تعداد یون H^+ ۲ برابر SO_4^{2-} است.

$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶)

۸۴. گزینه ۴ صحیح است.

۱) درست

۲) درست

$$NaOH + HCl \rightarrow NaCl + H_2O$$
$$\xrightarrow{\text{حذف یون ناظر}} OH^- + H^+ \rightarrow H_2O$$

۳) درست، محلول شیشه پاک‌کن یک باز است پس $[OH^-] > [H^+]$ می‌باشد.

۴) نادرست، در داروهای ضداسیدی ترکیبات یونی با خاصیت بازی وجود دارد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴، ۲۹، ۳۱ و ۳۲)

۸۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$K = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{K<10^{-4}} K \simeq M\alpha^2$$
$$M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \xrightarrow{\alpha_2=3\alpha_1} M_1 = 9M_2$$
$$\xrightarrow{\text{رقیق کردن}} M_1V_1 = M_2V_2 \xrightarrow{M_1=9M_2} \cancel{V_2}^{1350} = 9V_1$$
$$\Rightarrow V_1 = 150mL$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۹، ۲۲ و ۲۳)

۸۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$pH_B - pH_A = 3/6 \Rightarrow -\log[H^+]_B - (-\log[H^+]_A) = 3/6$$
$$= \log[H^+]_A - \log[H^+]_B \Rightarrow \log\frac{[H^+]_A}{[H^+]_B} = 3/6$$
$$\Rightarrow \frac{[H^+]_A}{[H^+]_B} = 10^{3/6} = 10^3 \times \frac{10^{0/6}}{4} = 4\times10^3$$

سپس غلظت HA را به دست می‌آوریم:

$$32g\,HA \times \frac{1mol\,HA}{128g\,HA} = \frac{1}{4}mol$$
$$\Rightarrow M_{HA} = \frac{mol_{HA}}{V} = \frac{\frac{1}{4}mol}{\frac{1}{2}L} = \frac{1}{2}\frac{mol}{L}$$

$$[H^+]_{HA} = M_{HA} = \frac{1}{2}\frac{mol}{L} \Rightarrow \frac{[H^+]_A^{\frac{1}{2}}}{[H^+]_B} = 4\times10^{3}$$

$$\Rightarrow [H^+]_B = \frac{1}{8}\times10^{-3}$$

$$K_{HB} = 2\times10^{-6} = \frac{[H^+]_B^2}{M_{HB}} \Rightarrow M_{HB} = \frac{\frac{1}{64}\times10^{-6}}{2\times10^{-6}} = \frac{1}{128}\frac{mol}{L}$$

$$g_{HB} \Rightarrow \frac{1}{128}\frac{mol}{L}\times\frac{1}{2}L\times\frac{60g\,HB}{1mol\,HB} \simeq 0/234\,g$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۳۴)

۸۷. گزینه ۳ صحیح است.

۱) نادرست، دمای شرایط STP صفر درجه سانتی‌گراد است در حالی‌که در دمای اتاق ($25^\circ C$) محدودهٔ pH اسیدی در بازهٔ ۰ تا ۷ است.

۲) نادرست، $[H^+]\times[OH^-]$ در دمای ثابت همواره ثابت است.

۳) درست

۴) نادرست، این جمله فقط در دمای $25^\circ C$ درست است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۶)

۸۸. گزینه ۴ صحیح است.

آ) نادرست، فقط در اسیدهای قوی تک‌پروتون‌دار درست است.

ب) نادرست، قبل از اتمام یونش تعداد اسید HA که یونیده می‌شود، بیشتر از تعداد H^+ و A^- است که تبدیل به HA می‌شود و بعد از برابر شدن سرعت واکنش رفت با برگشت و رسیدن به تعادل، مقدار آنها برابر می‌شود.

پ) درست

ت) درست، اگر ضعیف‌تر از HBr نباشد، پس α آن برابر ۱ است.

$$[H^+] = M\alpha = 2 \Rightarrow pH = -\log[H^+] = -\log(2) = -0/3$$

پس pH در محدودهٔ ۰ تا ۷ نمی‌باشد. بنابراین از HBr ضعیف‌تر است.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۲۵)

۸۹. گزینه ۴ صحیح است.

۱) نادرست، مقدار HCl به صفر می‌رسد.

۲) نادرست، در اسیدهای تک‌پروتون‌دار غلظت H^+ با آنیون همواره برابر است و ربطی به قوی یا ضعیف بودن ندارد.

۳) نادرست، با برابر شدن سرعت واکنش‌های رفت و برگشت غلظت‌ها برابر نمی‌شوند. بلکه ثابت می‌شوند.

۴) درست، چون غلظت یون‌ها در $Al_2(SO_4)_3$ بیشتر است، پس رسانایی آن بیشتر است.

$$\underbrace{Al_2(SO_4)_3}_{0/2\frac{mol}{L}} \rightarrow \underbrace{2Al^{3+} + 3SO_4^{2-}}_{1\frac{mol}{L}}$$

$$\underbrace{CaCl_2}_{0/3\frac{mol}{L}} \rightarrow \underbrace{Ca^{2+} + 2Cl^-}_{0/9\frac{mol}{L}}$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۱۶، ۱۷ و ۲۳)

۹۰. گزینه ۳ صحیح است.

$$Mg(OH)_2 + 2HCl \rightarrow MgCl_2 + 2H_2O$$
$$Al(OH)_3 + 3HCl \rightarrow AlCl_3 + 3H_2O$$

$$pH_{HCl} = 1/5 \Rightarrow [H^+]_{HCl} = 10^{-1/5} = 3\times10^{-2}$$

$$\xrightarrow{\text{HCl اسید قوی}} M_{HCl} = 3\times10^{-2}\frac{mol}{L}$$

$$mol\,HCl = 3\times10^{-2}\frac{mol}{L}\times0/7L \text{ مصرفی در ۲ واکنش}$$

$$= 21\times10^{-3}\,mol$$

مول $Al(OH)_3$ را x و $Mg(OH)_2$ را 2x فرض می‌کنیم. سپس HCl مصرفی در هر واکنش را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x\,mol\,Mg(OH)_2\times\frac{2\,mol\,HCl}{1\,mol\,Mg(OH)_2} = 4x\,mol\,HCl \\ x\,mol\,Al(OH)_3\times\frac{3\,mol\,HCl}{1\,mol\,Al(OH)_3} = 3x\,mol \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7x = 21\times10^{-3} \Rightarrow x = 3\times10^{-3}\,mol$$

$$Mg(OH)_2 \Rightarrow 6\times10^{-3}\,mol\times\frac{58g\,Mg(OH)_2}{1mol\,Mg(OH)_2}\times\frac{1000mg}{1g}$$

$$= 348\,mg$$

$$Al(OH)_3 \rightarrow 3\times10^{-3}\,mol\times\frac{78g}{1mol}\times\frac{1000mg}{1g} = 234\,mg$$

$$\text{جرم پودر} = 348\,mg + 234mg = 582\,mg$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۳۲)

۹۱. گزینه ۲ صحیح است.

فقط مورد (ب) نادرست است.

آ) درست

ب) در سلول گالوانی روی ـ مس، مس کاتد و روی آند است. آنیون‌ها هم در یک سلول گالوانی از کاتد به سمت آند حرکت می‌کنند که آند روی است نه مس.

پ) در سلول گالوانی روی ـ هیدروژن، نیم‌سلول هیدروژن کاتد است و واکنش زیر انجام می‌شود که در آن H^+ مصرف می‌شود، در نتیجه pH افزایش می‌یابد.

$$2H^+(aq) + 2e^- \rightarrow H_2(g)$$

ت) درست

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴۵ تا ۴۷)

۹۲. گزینه ۳ صحیح است.

موارد (ب)، (پ) و (ت) نادرست هستند.

ب) در استخراج آلومینیم گاز CO_2 به عنوان فراورده جانبی تولید می‌شود.

پ) با افزودن $CaCl_2$ به NaCl نقطهٔ ذوب آن کاهش می‌یابد. در کاتد Ca^{2+} و Na^+ داریم که برندهٔ رقابت کاتدی Na^+ است. در نتیجه فراورده کاتدی تغییر نمی‌کند.

ت) فلزات سازندهٔ حلبی، قلع و آهن هستند که فلز محافظ، قلع می‌باشد و قدرت کاهندگی کمتر و پتانسیل کاهشی استاندارد بیشتری دارد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۴ و ۵۵)

۹۳. گزینه ۲ صحیح است.

۲) پتانسیل کاهشی استاندارد مس از روی بیشتر است. در نتیجه واکنش انجام نمی‌شود و دمای محلول و غلظت یون‌های مس تغییر نخواهد کرد.

۳)

$$\overset{\circ}{2H_2} + O_2 \rightarrow \overset{+1}{2H_2O} \sim 4e^-$$: سلول سوختی هیدروژن

$$\overset{-4}{CH_4} + 2O_2 \rightarrow \overset{+4}{CO_2} + 2H_2O \sim 8e^-$$: سلول سوختی متان

۴) برقکافت آب در یک سلول الکترولیتی انجام می‌شود که قطب مثبت آن آند است و اکسایش آب در آن صورت می‌گیرد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴۳، ۴۹، ۵۱ و ۵۴)

۹۴. گزینه ۴ صحیح است.

۱) ولتاژ ایجادشده در سلول گالوانی استاندارد روی ـ مس برابر با $1/1V$ و در سلول گالوانی مس ـ نقره برابر $0/46V$ است.

۲) در این فرایند قاشق فولادی به کاتد و نقره به آند وصل می‌شود.

۳) درست

۴) در فرایند استخراج منیزیم در برقکافت منیزیم کلرید مذاب یون‌های منیزیم کاهش و منیزیم به صورت مذاب استخراج می‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۲، ۵۳، ۵۵، ۶۱ و ۶۲)

۹۵. گزینه ۳ صحیح است.

۱) $4-3=+1$

۲) $4-2=+2$

۳) $4-1=+3$

۴) $4-3=+1$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۶. گزینه ۳ صحیح است.

آ) درست

ب) E° فلز لیتیم از بقیه عناصر گروه خود کمتر است نه بیشتر.

پ) در چراغ خورشیدی از باتری قابل شارژ استفاده می‌شود.

ت) واکنش به صورت: $Zn + Ag_2^O \rightarrow ZnO + 2Ag$ می‌باشد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۴۹)

۹۷. گزینه ۲ صحیح است.

آ) درست

ب) روش‌های دیگری مانند سلول نور الکتروشیمیایی وجود دارد.

پ) درست، زیرا اکسنده‌ترین عنصر جدول می‌باشد.

ت) Cl_2 با تبدیل شدن به Cl^- کاهش می‌یابد و اکسید نمی‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۱ تا ۵۳)

۹۸. گزینه ۴ صحیح است.

مورد نادرست:

۴) پلاتین جزء فلزهای نجیب بوده و در هیچ شرایطی اکسید نمی‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴۳، ۵۱، ۵۴، ۵۶ و ۶۱)

۹۹. گزینه ۲ صحیح است.

فقط عبارت (ب) درست است.

آ) A مربوط به Zn می‌باشد و اکسایش می‌یابد.

ب) A کاهش و شعاع گونهٔ B افزایش می‌یابد، در نتیجه منظور گونه A می‌باشد که فلز Zn است که در لایهٔ ظرفیت خود ۱۲ الکترون دارد.

$$Zn = {}_{18}[Ar]3d^{10}4s^2$$

پ) شعاع گونهٔ A کاهش و شعاع گونهٔ B افزایش می‌یابد.

ت) ۲ مول e^- مبادله می‌شود.

$$2Mg(s) + O_2(g) \rightarrow MgO(s) \sim 4e^-$$

$$0/5mol\,Mg \times \frac{4mol\,e^-}{2mol\,Mg} = 2mol\,e^-$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۴۰)

۱۰۰. گزینه ۱ صحیح است.

$$2Fe^{3+} + Fe \rightarrow 3Fe^{2+} \sim 2e^-$$

$$Au^{3+} + 3Fe^{2+} \rightarrow Au + 3Fe^{3+} \sim 3e^-$$

$$8/96\,g\,Fe \times \frac{1mol\,Fe}{56g\,Fe} \times \frac{2mol\,e^-}{1mol\,Fe} = 0/32mol\,e^-$$

$$e^- = \frac{1}{2} \times 0/32 = 0/16mol$$ در واکنش دوم

$$0/16mol\,e^- \times \frac{1mol\,Au^{3+}}{3mol\,e^-} \times \frac{197g\,Au^{3+}}{1mol\,Au^{3+}} = 10/5g\,Au^{3+}$$

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۴۲)

۱۰۱. گزینه ۲ صحیح است.

$$\underset{x\,g}{2Al} + 3Zn^{2+} \rightarrow 2Al^{3+} + \underset{y\,mol}{3Zn} \sim 6e^-$$

$$2H_2O + 2e^- \rightarrow \underset{1/12L}{H_2} + 2OH^-$$

$$1/12L\,H_2 \times \frac{1mol\,H_2}{22/4L\,H_2} \times \frac{2mol\,e^-}{1mol\,H_2} = 0/1mol\,e^-$$

$$0/1mol\,e^- \times \frac{2mol\,Al}{6mol\,e^-} \times \frac{27g\,Al}{1mol\,Al} = 0/9g$$

$$0/1mol\,e^- \times \frac{3mol\,Zn}{6mol\,e^-} = 0/05mol$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴۲، ۴۳ و ۵۴)

۱۰۲. گزینه ۱ صحیح است.

آ) ورودی C در شکل مربوط به گاز H_2 و ورودی D مربوط به گاز O_2 می‌باشد.

ب) A تیغهٔ آند و B تیغهٔ کاتد می‌باشد.

پ) در این سلول آند هیدروژن است که E° آن صفر است و emf سلول برابر با E° کاتد خواهد بود.

ت) نیم‌واکنش آندی (نه واکنش آندی) به صورت $H_2(g) + 2H^+(aq) + 2e^-$ می‌باشد (نیم‌واکنش باید به صورت موازنه شده باشد.)

(شیمی دوازدهم، صفحهٔ ۵۱)

۱۰۳. گزینه ۲ صحیح است.

$$\text{I)}\ 2\overset{+3}{Cl}F_3(g) + 2\underset{-3}{N}H_3(g) \rightarrow 6HF(g) + 1\underset{0}{N_2}(g) + 1\overset{0}{Cl_2}(g)$$

$$\text{II)}\ 1\underset{+3}{P}Cl_3(g) + 4\overset{+1}{H_2}O(l) \rightarrow 1H_3\underset{+5}{P}O_4(aq) + 3HCl(aq) + 1\overset{0}{H_2}(g)$$

۱) گونهٔ کاهنده در واکنش (I) عدد اکسایشی برابر با ۳− دارد.

۲) گونهٔ اکسنده واکنش (II) H_2O می‌باشد که ضریب آن ۴ و تغییر عدد اکسایش آن، برابر یک است. ضریب استوکیومتری HF برابر ۶ است.

۳) درست، گونهٔ کاهش یافته ClF_3 می‌باشد و گونهٔ اکسایش یافته NH_3 است که ضریب استوکیومتری در هر دو برابر با ۲ می‌باشد.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۱۰۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} E^\circ_{A-B\ \text{سلول}} = E^\circ_B - E^\circ_A = 1/1 \\ E^\circ_{C-B\ \text{سلول}} = E^\circ_C - E^\circ_B = 0/46 \end{cases} \Rightarrow \Delta E^\circ = 0/64V = 640mV$$

در سلول $C-B$ نیم‌سلول B آند است و e^- از آن خارج می‌شود. در حالی‌که در سلول $A-B$ نیم‌سلول B کاتد است و e^- به آن وارد می‌شود.

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۱۰۵. گزینه ۲ صحیح است.

$$E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = 0/4 - (-0/44) = +0/84V$$

$$4Fe + 6H_2O + \underset{xL}{\underline{3O_2}} \rightarrow \underset{37/5g}{\underline{4Fe(OH)_3}}$$

$$37/5g\ Fe(OH)_3 \times \frac{1mol\ Fe(OH)_3}{107g\ Fe(OH)_3} \times \frac{3mol\ O_2}{4mol\ Fe(OH)_3} \times \frac{22/4L\ O_2}{1mol\ O_2} \simeq 5/887\ L\ O_2$$

(شیمی دوازدهم، صفحه‌های ۵۶ و ۵۷)